數學傳播 49卷2期, pp. 118-122

三角形旁切圓的幾個有趣的性質

劉才華

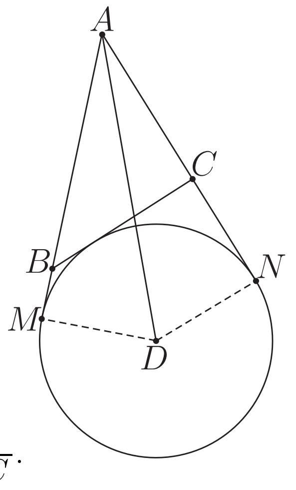
摘要: 本文旨在給出與三角形旁切圓相關的 7 個性質。

關鍵字: 旁切圓、不等式、周長、面積、角平分線。

旁切圓是指和三角形的一邊及其他兩邊的延長線相切的圓。每個三角形都有 3 個旁切圓, 各與三角形其中一邊和另外兩邊的延長線相切。它們的圓心稱爲旁心, 旁心是三角形一內角平分線和另外兩外角平分線的交點, 每個三角形有三個旁心。本文旨在給出與三角形旁切圓相關的 7 個有趣的性質。

爲了行文方便, 我們約定 $\triangle ABC$ 的三個內角 $\angle BAC=A$, $\angle ABC=B$, $\angle ACB=C$, 對應的三邊分別爲 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 對應的旁切圓圓心分別爲 D,E,F, 外接圓, 內切圓的半徑分別爲 R, r, 面積爲 s, 半周長爲 p, 對應的角平分線長爲 f_a, f_b, f_c。

性質 1: $\dfrac{AD^2}{bc}+\dfrac{BE^2}{ca}+\dfrac{CF^2}{ab}=\dfrac{4R}{r}+1.$



證明: 如圖, 設 $\angle BAC$ 對應的旁切圓 $\odot D$ 和直線 AB, AC 相切於點 M,N, 由圓中切線定理得

$AM+AN=AB+BC+CA=a+b+c$, 則

$AM=AN=\dfrac{a+b+c}{2}=p.$

在 $Rt\triangle AMD$ 中, 由 $AM=AD\cos\dfrac{A}{2}$ 得

$AD=\dfrac{AM}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{p}{\cos\frac{A}{2}}$. 同理得 $BE=\dfrac{p}{\cos\frac{B}{2}}$, $CF=\dfrac{p}{\cos\frac{C}{2}}$.

於是

$$\frac{AD^2}{bc}+\frac{BE^2}{ca}+\frac{CF^2}{ab}=\frac{p^2}{bc\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{p^2}{ca\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{p^2}{ab\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2p^2}{bc(1+\cos A)} + \frac{2p^2}{ca(1+\cos B)} + \frac{2p^2}{ab(1+\cos C)}$$
$$= \frac{4p^2}{(b+c)^2-a^2} + \frac{4p^2}{(c+a)^2-b^2} + \frac{4p^2}{(a+b)^2-c^2}$$
$$= \frac{2p}{b+c-a} + \frac{2p}{c+a-b} + \frac{2p}{a+b-c} = \frac{4p^2[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)]}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

把海龍-秦九韶公式 $16p^2r^2 = 16s^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$, $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-4Rr-r^2)$ 和 $bc+ca+ab = p^2+4Rr+r^2$ 等代入上式並整理得

$$\frac{AD^2}{bc} + \frac{BE^2}{ca} + \frac{CF^2}{ab} = \frac{4R}{r} + 1.$$

性質 2: $\dfrac{bc}{AD^2} + \dfrac{ca}{BE^2} + \dfrac{ab}{CF^2} = 1.$

證明: 由性質 1 的證明得

$$AD = \frac{AM}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad BE = \frac{p}{\cos\frac{B}{2}}, \quad CF = \frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

則

$$\frac{bc}{AD^2} + \frac{ca}{BE^2} + \frac{ab}{CF^2} = \frac{bc\cos^2\frac{A}{2}}{p^2} + \frac{ca\cos^2\frac{B}{2}}{p^2} + \frac{ab\cos^2\frac{C}{2}}{p^2}$$
$$= \frac{bc(1+\cos A)}{2p^2} + \frac{ca(1+\cos B)}{2p^2} + \frac{ab(1+\cos C)}{2p^2}$$
$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4p^2} + \frac{2ca+c^2+a^2-b^2}{4p^2} + \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4p^2}$$
$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4p^2} + \frac{(c+a)^2-b^2}{4p^2} + \frac{(a+b)^2-c^2}{4p^2}$$
$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4p^2} + \frac{(c+a+b)(c+a-b)}{4p^2} + \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4p^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)^2}{4p^2} = 1,$$

故 $$\frac{bc}{AD^2} + \frac{ca}{BE^2} + \frac{ab}{CF^2} = 1.$$

性質 3: $AD \cdot DE \cdot CF \geq 3\sqrt{3}abc.$

證明: 由性質 1 的證明得

$$AD=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}},\quad DE=\frac{p}{\cos\frac{B}{2}},\quad CF=\frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

則

$$\begin{aligned}AD\cdot DE\cdot CF&=\frac{p^3}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{(a+b+c)^3}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&\geq\frac{(3\sqrt[3]{abc})^3}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{27abc}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.\end{aligned}$$

又由熟悉的不等式 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 得 $AD\cdot DE\cdot CF\geq 3\sqrt{3}abc.$

性質4: $AD+BE+CF\geq 2\sqrt{3}p.$

證明: 由性質 1 的證明得

$$AD=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}},\quad BE=\frac{p}{\cos\frac{B}{2}},\quad CF=\frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

則

$$AD+BE+CF=p\Big(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\Big)\geq\frac{9p}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

由 $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 得 $AD+BE+CF\geq\frac{9p}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}p,$

故 $AD+BE+CF\geq 2\sqrt{3}p.$

性質5: $a\cdot AD+b\cdot BE+c\cdot CF\geq 12s.$

證明: 由性質 1 的證明得

$$AD=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}},\quad BE=\frac{p}{\cos\frac{B}{2}},\quad CF=\frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

結合正弦定律 (law of sine) 得

$$\begin{aligned}&a\cdot AD+b\cdot BE+c\cdot CF\\&=\frac{ap}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{bp}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{cp}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2pR\sin A}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{2pR\sin B}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{2pR\sin C}{\cos\frac{C}{2}}\end{aligned}$$

$$= 4pR\sin\frac{A}{2} + 4pR\sin\frac{B}{2} + 4pR\sin\frac{C}{2} = 4pR\Big(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\Big).$$

由 $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geq 1 + \frac{3\sqrt{3}r}{2p}$ (見文 [1] 第 592 頁) 得

$$a\cdot AD + b\cdot BE + c\cdot CF \geq 4pR\Big(1 + \frac{3\sqrt{3}r}{2p}\Big) = 4pR + 6\sqrt{3}Rr.$$

又由 $R \geq 2r$ 和 $2p \leq 3\sqrt{3}R$ 得 $a\cdot AD + b\cdot BE + c\cdot CF \geq 8pr + 4pr = 12s.$

故 $a\cdot AD + b\cdot BE + c\cdot CF \geq 12s.$

性質6: $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2p}.$

證明: 由性質 1 的證明得

$$AD = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad BE = \frac{p}{\cos\frac{B}{2}}, \quad CF = \frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

則

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{p}.$$

由 $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 得 $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2p}.$

性質7: $\dfrac{f_a}{AD} + \dfrac{f_b}{BE} + \dfrac{f_c}{CF} \leq \dfrac{3}{2}.$

證明: 由三角形內角平分線公式得

$$f_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}, \quad f_b = \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}, \quad f_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

由性質 1 的證明得

$$AD = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad BE = \frac{p}{\cos\frac{B}{2}}, \quad CF = \frac{p}{\cos\frac{C}{2}}.$$

則

$$\frac{f_a}{AD} + \frac{f_b}{BE} + \frac{f_c}{CF} = \frac{2bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)p} + \frac{2ca\cos^2\frac{B}{2}}{(c+a)p} + \frac{2ab\cos^2\frac{C}{2}}{(a+b)p}$$

$$=\frac{bc(1+\cos A)}{(b+c)p}+\frac{ca(1+\cos B)}{(c+a)p}+\frac{ab(1+\cos C)}{(a+b)p}$$
$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2(b+c)p}+\frac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2(c+a)p}+\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2(a+b)p}$$
$$=\frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}$$
$$=3-\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big).$$

由 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}\sum\Big(\dfrac{b-c}{b+c}\Big)^2$

(見文 [1] 第 563 頁) 得 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$, 則

$$\frac{f_a}{AD}+\frac{f_b}{BE}+\frac{f_c}{CF}=3-\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)\leq\frac{3}{2},$$

故 $\dfrac{f_a}{AD}+\dfrac{f_b}{BE}+\dfrac{f_c}{CF}\leq\dfrac{3}{2}.$

讀者可以進一步去開發更加有趣的性質。

參考文獻

1. 楊學枝。不等式研究 [M]。拉薩: 西藏人民出版社, 2000。

—本文作者任教中國山東省泰安市甯陽縣第一中學—